

Examen de Mathématiques

Les candidats choisiront 6 exercices parmi les 10 exercices proposés.

Calculatrices autorisées. Documents interdits.

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x^2 - (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1).$$

1) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que

$$f'(x) = 2x - 2x \ln(x^2 + 1).$$

2) Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

3) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α , dans l'intervalle $[\sqrt{e-1}; \sqrt{e^2-1}]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Donner une approximation décimale à 10^{-2} près par défaut de α .

4) En déduire le signe de $f(x)$ pour $[0; +\infty[$.

EXERCICE 2

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que la suite est majorée par 2.

2) Montrer que

$$0 < 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}.$$

3) En déduire que

$$0 < 2 - u_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

4) Montrer que la suite $(2 - u_n)$ converge vers 0. En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 3

A- Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln(x) + 6.$$

En utilisant le sens de variation de g , déterminer, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.

B- On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par:

$$f(x) = 3\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1.$$

- 1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- 2) Utiliser la partie A, pour déterminer le sens de variation de f .
- 3) Soient Δ la droite d'équation de $y = x - 1$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé.
 - a) Montrer que Δ est asymptote à C_f et étudier la position relative de C_f et Δ .
 - b) Construire C_f et Δ .

EXERCICE 4

Calculer les intégrales suivantes.

$$1) \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+2t^3}} dt$$

$$2) \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \tan t dt$$

$$3) \int_{-1}^0 \frac{2t}{(t^2+1)^3} dt$$

$$4) \int_0^1 te^{t^2} dt$$

$$5) \int_0^1 \frac{4x}{(2x^2+1)^2} dx$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(1 + \tan^2 x) dx$$

EXERCICE 5

Etudier la limite de la suite (u_n) à l'aide d'un théorème de comparaison dans chacun des cas suivants.

I-

- a) $u_n = \cos(n) - n$.
- b) $u_n = \frac{3 - \sin n}{n}$.
- c) $u_n = 2n + (-1)^n$.

d) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

II-

Soit la suite (u_n) définie par:

$$u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}.$$

Montrer que $1 \leq u_n \leq 3$.

EXERCICE 6

I-

Soient trois nombres complexes: $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$.

On pose $Z = \frac{z_1^3 z_2^4}{z_3^2}$.

- 1) Ecrire z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.
- 2) En déduire une forme exponentielle de Z .
- 3) Calculer alors la forme algébrique de Z .

II-

Soit a un nombre complexe non nul et soit j tel que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Montrer que les trois points d'affixes respectives a , ja et j^2a sont les sommets d'un triangle équilatéral direct.

EXERCICE 7

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f . Etudier les variations de f .
- 2) Soit g la fonction telle que pour tout x de $]0; +\infty[$, $g(x) = f(x)$ et $g(0) = 0$. Etudier la dérivabilité de g en 0.
- 3) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormal.

EXERCICE 8

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f . Etudier la fonction f (ensemble de définition, parité, variation de f).
- 2) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un ensemble E à préciser.
- 3) Expliquer la fonction réciproque de f .
- 4) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et de sa réciproque.

EXERCICE 9

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- a) Montrer que (u_n) est croissante.
- b) Montrer que pour tout $n : u_n \geq n$.
- c) Déterminer la limite de (u_n) .

EXERCICE 10

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct. On note A le point d'affixe $4 + 2i$, B le point d'affixe $-2 - i$ et M le point d'affixe z .

Soit le nombre complexe

$$Z = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}.$$

- 1) Donner une signification géométrique de $|Z|$ et de $\arg Z$.
- 2) Préciser la nature puis construire:
 - a) l'ensemble des points M d'affixe z , tels que $|Z| = 1$.
 - b) l'ensemble des points M d'affixe z , tels que $|Z| = 2$.

Bon courage.