

Concours d'entrée en première année de  
l'E.S.M.E. Sudria.  
Epreuve de Mathématiques. Terminale STI.

Les candidats traiteront au moins 6 exercices parmi les 10 exercices proposés. Ceux-ci recouvrent l'intégralité du programme. Il est conseillé aux candidats de lire l'intégralité du sujet avant de choisir les exercices qu'ils souhaitent traiter.

.

**Calculatrices autorisées. Documents interdits.**

.

**EXERCICE 1**

Calculer, si elles existent, les limites suivantes.

$$1) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 2x - 15}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{2x - 3} - 3}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{|x^2 - 1|}$$

.

**EXERCICE 2**

On considère le nombre complexe  $i$  tel que  $i^2 = -1$ . On rappelle que son argument vaut  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Déterminer un module et un argument du nombre complexe  $Z = 8\sqrt{2}(1 + i)$ .
  2. On considère le nombre complexe  $z_0 = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - \sqrt{2}$ . Vérifier que  $z_0^2 = Z$ .
  3. Déduire des réponses aux questions précédentes:
    - (a) le module et un argument de  $z_0$ .
    - (b) Les valeurs numériques exactes de  $\cos(\frac{\pi}{8})$  et  $\sin(\frac{\pi}{8})$ .
- .
- .

### EXERCICE 3

Déterminer l'ensemble de définition et la fonction dérivée dans les cas suivants.

$$1) f(x) = \ln(5x^2 + 3x - 2), \quad 2) f(x) = \ln\left(\frac{-2x + 1}{4x - 3}\right)$$

$$3) f(x) = \ln(-2x + 1) - \ln(4x - 3), \quad 4) f(x) = \sqrt{\ln x}$$

·  
·

### EXERCICE 4

Calculer les intégrales suivantes.

$$1) \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1 + 2t^3}} dt$$

$$2) \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \tan t dt$$

$$3) \int_{-1}^0 \frac{2t}{(t^2 + 1)^3} dt$$

$$4) \int_0^1 te^{t^2} dt$$

$$5) \int_0^1 \frac{4x}{(2x^2 + 1)^2} dx$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(1 + \tan^2 x) dx$$

·  
·

### EXERCICE 5

Soit la fonction  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

1) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.

2) Etudier les variations de  $f$ . (On dressera un tableau de variations et on admettra que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$ .)

·  
·

### EXERCICE 6

I-

Soient trois nombres complexes:  $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$  et  $z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$ .  
On pose

$$Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}.$$

- 1) Ecrire  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.
- 2) En déduire une forme exponentielle de  $Z$ .
- 3) Calculer alors la forme algébrique de  $Z$ .

II-

Soit  $a$  un nombre complexe non nul et soit  $j$  tel que  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Montrer que les trois points d'affixes respectives  $a$ ,  $ja$  et  $j^2a$  sont les sommets d'un triangle équilatéral direct.

.  
.

### EXERCICE 7

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $g(x) = 3 - 5xe^{-3x}$ .

- 1) Calculer la limite de  $g(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ .
- 2) Vérifier que  $g(x) = 3 - \frac{5}{e^{2x}} \frac{x}{e^x}$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . On admettra que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .
- Conclure l'existence d'une asymptote à la courbe de  $g$ .
- 3) Etudier les variations de  $g$ . (On dressera un tableau de variations.)

.  
.

### EXERCICE 8

Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = e^{-2x}$ .

- 1) Etudier les variations de  $h$ . (On dressera un tableau de variations.)
- 2) Soit la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_n = e^{-2n}$ .
  - a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
  - b) Donner le sens de variation de  $(u_n)$ .
  - c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
  - d) A partir de quelle valeur de  $n$  a-t-on  $u_n < 10^{-4}$  ?

.  
.

### EXERCICE 9

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 4$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
- 2) Posons  $v_n = -1 + u_n$ . Calculer  $v_0$  et montrer que  $(v_n)$  est géométrique.
- 3) Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$  et calculer la limite de  $(v_n)$ .
- 4) Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$  et calculer la limite de  $(u_n)$ .

.  
.

### EXERCICE 10

Soit l'équation différentielle:

$$y'' + 16y = 0.$$

En imposant les conditions initiales suivantes:  $y'(0) = 0$  et  $y(0) = 1$ , résoudre cette équation différentielle.

Bon courage.