

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE EPREUVE DE MATHEMATIQUES, Terminales S

Les candidats traiteront au moins 6 exercices parmi les 10 exercices proposés.
Ceux-ci recouvrent l'intégralité du programme.

Il est conseillé aux candidats de lire l'intégralité du sujet avant de choisir les exercices qu'ils souhaitent traiter.

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont interdits.

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2(1 - \ln x) \text{ Si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On appelle C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- 1) Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{f(x)}{x}$. En déduire que f est dérivable en 0.
- 2) a) Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
b) Etudier les variations de f .
- 3) a) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse e .
b) Préciser la tangente à C_f au point d'abscisse 0. Tracer T et C_f .

EXERCICE 2

Calculer les intégrales suivantes.

$$1) \int \frac{-2e^{3x}}{3e^{3x} + 1} dx$$

$$2) \int_e^2 \frac{1}{x \ln x} dx$$

EXERCICE 3

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n > 0$ sont adjacentes. On prendra

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}.$$

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. On note A , le point d'affixe $2i$, B le point d'affixe $-3-3i$ et M le point d'affixe z .

Soit le nombre complexe $Z = \frac{z-2i}{z+3+3i}$.

- 1) Donner une signification géométrique de $|Z|$ et $\arg Z$.
- 2) Préciser la nature puis construire:
 - a) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z|$ est un réel positif.
 - b) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z|$ est un imaginaire pur.

EXERCICE 5

On dispose d'une urne contenant 5 boules noires et 15 boules rouges. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Le joueur tire simultanément trois boules.

- 1) Calculer la probabilité que le joueur sorte 0,1,2 ou 3 boules rouges.
- 2) Le joueur gagne 7 euros par boule rouge obtenue. Soit X la variable aléatoire désignant le gain du joueur. Calculer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

EXERCICE 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f et donner la parité de f .
- 2) Etudier la fonction f sur $]0;+\infty[$. (On dressera le tableau des variations de f .)

3) Montrer que f réalise une bijection d'un ensemble E sur un ensemble F à préciser.

4) Expliquer la fonction réciproque de f notée g en tenant compte de la question 3).

5) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et de sa réciproque g .

EXERCICE 7

Calculer les intégrales suivantes.

1) $\int_b^a \frac{1}{\cos^2 x} dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \tan x (-1 - \tan^2 x) dx.$

EXERCICE 8

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = -2u_n^2 + u_n - 1$.

a) Montrer que (u_n) est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n : u_n \leq -n$.

c) Déterminer la limite de (u_n) .

EXERCICE 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. On note A , le point d'affixe $7 + 7i$, B le point d'affixe $-3 - 5i$ et M le point d'affixe z .

Soit le nombre complexe $Z = \frac{z - 7 - 7i}{z + 3 + 5i}$.

1) Donner une signification géométrique de $|Z|$ et $\arg Z$.

2) Préciser la nature puis construire:

a) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.

b) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z| = 2$.

EXERCICE 10

Dans une ville, 30% de la population ont les cheveux noirs, 40% les yeux marron et 25% les cheveux noirs et les yeux marron. On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité:

- 1) pour qu'elle ait les yeux marron, sachant qu'elle a les cheveux noirs ?
- 2) pour qu'elle n'ait pas les cheveux noirs, sachant qu'elle a les yeux marron ?

Bon courage.