Concours d'entrée en première année de l'ESME Sudria
Epreuve de Mathématiques. Terminale STI.

Les candidats traiterons au moins 6 exercices parmi les 10 exercices proposés. Ceux-ci recouvrent l'intégralité du programme. Il est conseillé aux candidats de lire l'intégralité du sujet avant de choisir les exercices qu'ils souhaitent traîter.

.

Calculatrices autorisées. Documents interdits.

.

.

EXERCICE 1

Calculer, si elles existent, les limites suivantes.

$$1)\ \lim_{x\to -5} \frac{x^2+8x+15}{x^2+2x-15},\ \ 2)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$$

$$3)\ \lim_{x\to 6} \frac{x-6}{\sqrt{2x-3}-3},\ \ 4)\ \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{|x^2-1|}$$

.

.

EXERCICE 2

On considère le nombre complexe i tel que $i^2=-1$. On rappel que son argument vaut $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer un module et un argument du nombre complexe $Z=8\sqrt{2}(1+i)$.

2. On considère le nombre complexe $z_0 = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}+2i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Vérifier que $z_0^2=Z$.

3. Déduire des réponses aux questions précédentes:

(a) le module et un argument de z_0.

(b) Les valeurs numériques exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

.

.

EXERCICE 3

Déterminer l'ensemble de définition et la fonction dérivée dans les cas suivants.

$$1)f(x) = \ln(5x^2 + 3x - 2),\ 2)f(x) = \ln(\frac{-2x+1}{4x-3})$$

$$3)f(x) = \ln(-2x+1) - \ln(4x-3),\ 4)f(x) = \sqrt{\ln x}$$

.

.

EXERCICE 4

Calculer les intégrales suivantes.

$$1) \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+2t^3}} dt$$

$$2) \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \tan t dt$$

$$3) \int_{-1}^0 \frac{2t}{(t^2+1)^3} dt$$

$$4) \int_0^1 te^{t^2} dt$$

$$5) \int_0^1 \frac{4x}{(2x^2+1)^2} dx$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(1+\tan^2 x) dx$$

.

.

EXERCICE 5

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x \ln x},\ x \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2 Etudier les variations de f. (On dressera un tableau de variations et on admettra que $\lim_{x \to 0^+}(x \ln x) = 0$.)

.

.

EXERCICE 6

I-

Soient trois nombres complexes: $z_1 = -3 + i\sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$. On pose

$$Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}.$$

1) Ecrire $z_1,\ z_2$ et z_3 sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.
2) En déduire une forme exponentielle de Z.
3) Calculer alors la forme algébrique de Z.
II-
Soit a un nombre complexe non nul et soit j tel que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que les trois points d'affixes respectives $a,\ ja$ et j^2a sont les sommets d'un triangle équilatéral direct.

.

.

EXERCICE 7

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par:$g(x) = 3 - 5xe^{-3x}$.
1) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
2) Vérifier que $g(x) = 3 - \frac{5}{e^{2x}}\frac{x}{e^{x}}$ et en déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. On admettra que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- Conclure l'existence d'une asymptote à la courbe de g.
3) Etudier les variations de g. (On dressera un tableau de variations.)

.

.

EXERCICE 8

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-2x}$.
1) Etudier les variations de h. (On dressera un tableau de variations.)
2) Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = e^{-2n}$.
$a)$ Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
$b)$ Donner le sens de variation de (u_n).
$c)$ Déterminer la limite de la suite (u_n).
$d)$ A partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n < 10^{-4}$?

.

.

EXERCICE 9

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
1) Calculer $u_1,\ u_2$ et u_3.
2) Posons $v_n = -1 + u_n$. Calculer v_0 et montrer que (v_n) est géométrique.
3) Déterminer v_n en fonction de n et calculer la limite de (v_n).
4) Déterminer u_n en fonction de n et calculer la limite de (u_n).

.

.

EXERCICE 10

Soit l'équation différentielle:

$$y'' + 16y = 0.$$

En imposant les conditions initiales suivantes: $y'(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, résoudre cette équation différentielle.

Bon courage.